Questão 59: Alternativa B

Os preços que aparecem no cardápio de um restaurante já incluem um acréscimo de 10% referente ao total de impostos. Na conta, o valor a ser pago contém o acréscimo de 10% relativo aos serviços (gorjeta). Se o valor total da conta for p reais, o cliente estará desembolsando pelo custo original da refeição, em reais, a quantia de

a) $p/1,20$.

b) $p/1,21$.

c) $p/0,80$.

d) $p/0,81$.

Resolução:

Seja $\boldsymbol{x}$ o custo original do produto. Devido ao acréscimo de 10% referente aos impostos tem-se que o primeiro aumento resulta em

$$\boldsymbol{x + 10\% \cdot x = x + 0,1 \cdot x = 1,1 \cdot x}.$$

De modo análogo, como há um aumento de 10% da gorjeta segue que o valor anterior também será multiplicado por $1,1$ (fator de correção), ou seja,

$$\boldsymbol{1,1 \cdot 1,1 \cdot x}.$$

Portanto, como $\boldsymbol{p}$ é o valor depois destes dois aumentos, tem-se

$$\boldsymbol{1,1 \cdot 1,1 \cdot x = p \Leftrightarrow 1,21 \cdot x = p \Leftrightarrow x = \frac{p}{1,21}}.$$

Questão 61: Alternativa C

A representação decimal de certo número inteiro positivo tem dois algarismos. Se o triplo da soma desses algarismos é igual ao próprio número, então o produto dos algarismos é igual a

a) 10.
b) 12.
c) 14.
d) 16.

Resolução:

Seja XY o número de dois algarismo, onde X é a dezena e Y a unidade. Do enunciado, tem-se

$$3 \cdot (X + Y) = 10X + Y \Leftrightarrow 3 \cdot X + 3 \cdot Y = 10X + Y \Leftrightarrow 2 \cdot Y = 7 \cdot X$$

Logo,

$$Y = \frac{7 \cdot X}{2}$$

e, como $1 \leq X \leq 9$ e $0 \leq Y \leq 9$ segue que a única possibilidade é $X = 2$ e portanto $Y = 7$.

Assim, o produto dos algarismos é igual a $X \cdot Y = 2 \cdot 7 = 14$.

Questão 62 – Alternativa B

O sistema de segurança de um aeroporto consiste de duas inspeções. Na primeira delas, a probabilidade de um passageiro ser inspecionado é de $3/5$. Na segunda, a probabilidade se reduz para $1/4$. A probabilidade de um passageiro ser inspecionado pelo menos uma vez é igual a

a) $17/20$.

b) $7/10$.

c) $3/10$.

d) $3/20$.

Resolução:

Seja A o evento primeira inspeção e B o evento segunda inspeção. Tem-se, do enunciado, $P(A) = \frac{3}{5}$ e $P(B) = \frac{1}{4}$. Deve-se calcular $P(A \cup B)$, uma vez que se pede que pelo menos um dos eventos ocorra. Assim, como

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

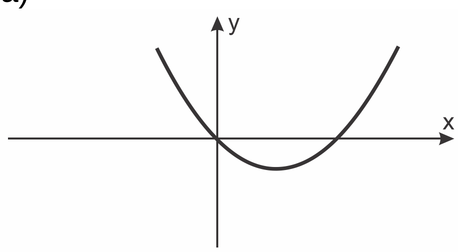
segue que

$$P(A \cup B) = \frac{3}{5} + \frac{1}{4} - \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{5} + \frac{1}{4} - \frac{3}{20} = \frac{12}{20} + \frac{5}{20} - \frac{3}{20} = \frac{14}{20} = \frac{7}{10}.$$

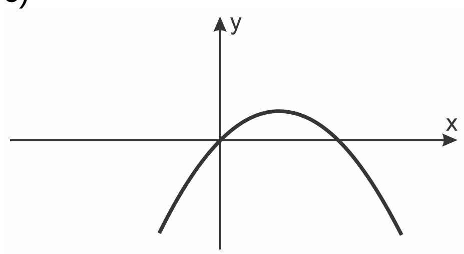
Questão 63 – Alternativa B.

Sejam a e b números reais positivos. Considere a função quadrática $f(x) = x(ax + b)$, definida para todo número real x. No plano cartesiano, qual figura corresponde ao gráfico de $y = f(x)$?

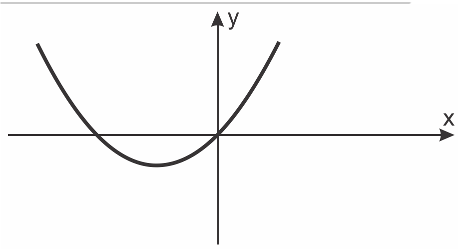
a)



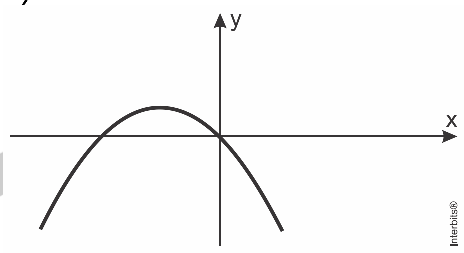
c)



b)

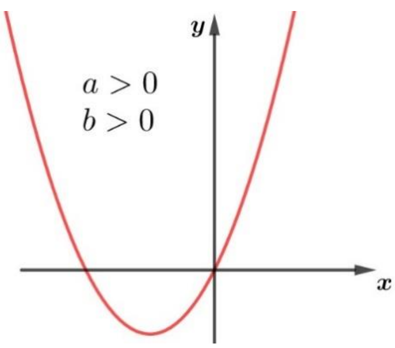


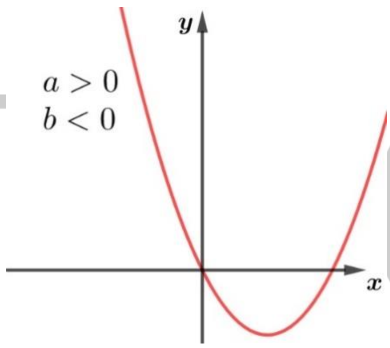
d)



Resolução:

Como $f(x) = x \cdot (ax + b) = a \cdot x^2 + b \cdot x$, com a e b números reais positivos, de a segue que a parábola possui a concavidade voltada para cima. De b, como ele é positivo, segue que o gráfico da parábola intersecta o eixo das coordenadas (Oy) em sua parte crescente.





Deste modo a alternativa que melhor representa tais considerações é a B.

Uma outra resolução seria observar que as raízes da função $f(x) = x \cdot (ax + b)$ são

$x = 0$ e $x = -\frac{b}{a}$.

Como a e b são número reais positivos, seque que $-\frac{b}{a}$ é negativo, concluindo que a alternativa que melhor representa tal condição juntamente com a condição de a parábola possuir a concavidade para cima $(a > 0)$ é a alternativa B.

Questão 64: Alternativa B

Sejam k e θ números reais tais que $\operatorname{sen}\theta$ e $\cos\theta$ são soluções da equação quadrática $2x^2 + x + k = 0$. Então, k é um número

a) irracional.
b) racional não inteiro.
c) inteiro positivo.
d) inteiro negativo.

Resolução:

Das relações de soma e produto, tem-se:

$$\begin{cases} \operatorname{sen}\theta + \cos\theta = -\frac{1}{2} \\ \operatorname{sen}\theta \cdot \cos\theta = \frac{k}{2} \end{cases},$$

uma vez que $\operatorname{sen}\theta$ e $\cos\theta$ são raízes da equação $2x^2 + x + k = 0$. Como o exercício pede o valor de k, uma boa estratégia consiste em elevar ambos os membros da primeira equação ao quadrado, assim:

$$(\operatorname{sen}\theta + \cos\theta)^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow \operatorname{sen}^2\theta + 2 \cdot \operatorname{sen}\theta \cdot \cos\theta + \cos^2\theta = \frac{1}{4}.$$

Como $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$ a última igualdade acima resulta em

$$2 \cdot \operatorname{sen}\theta \cdot \cos\theta + 1 = \frac{1}{4} \Rightarrow 2 \cdot \operatorname{sen}\theta \cdot \cos\theta = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4} \Rightarrow \operatorname{sen}\theta \cdot \cos\theta = -\frac{3}{8}.$$

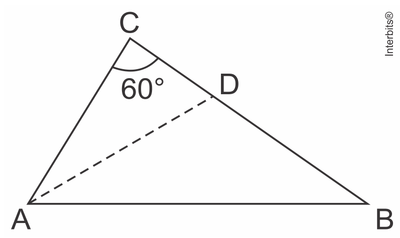
Por fim, do sistema acima tem-se que $\operatorname{sen}\theta \cdot \cos\theta = \frac{k}{2}$, logo

$$\frac{k}{2} = -\frac{3}{8} \Rightarrow k = -\frac{6}{8} = -\frac{3}{4},$$

que é um número racional não inteiro.

Questão 65 – Alternativa C

No triângulo ABC exibido na figura a seguir, AD é a bissetriz do ângulo interno em A, e $\overline{AD} = \overline{DB}$.



O ângulo interno em A é igual a

a) $60°$.
b) $70°$.
c) $80°$.
d) $90°$.

Resolução:

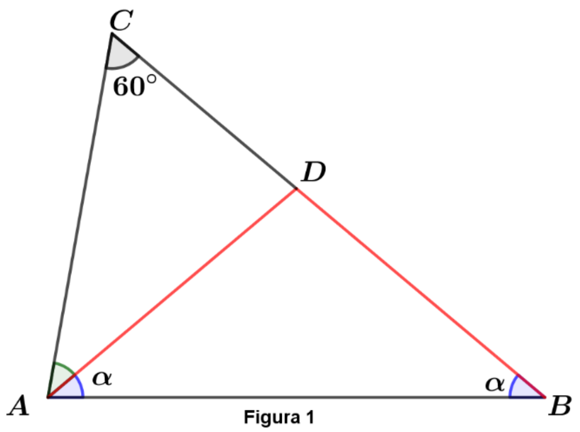


Figura 1

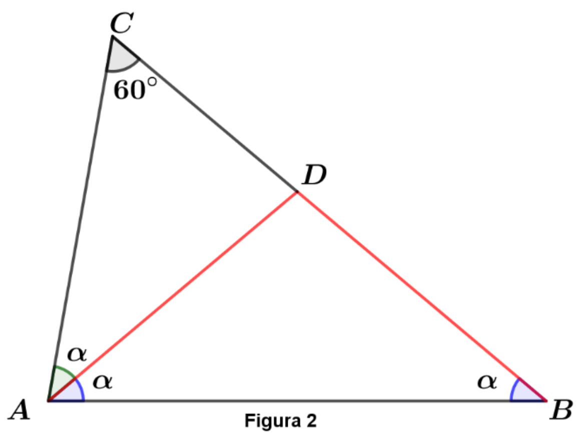


Figura 2

Na figura 1, sendo $\overline{\boldsymbol{AD}} = \overline{\boldsymbol{DB}}$ então o triângulo ADB é isósceles com $\boldsymbol{D\hat{A}B} = \boldsymbol{A\hat{B}D} = \boldsymbol{\alpha}$. Na figura 2, sendo AD bissetriz do ângulo interno A então $\boldsymbol{C\hat{A}D} = \boldsymbol{D\hat{A}B} = \boldsymbol{\alpha}$.

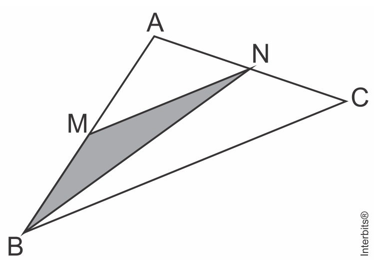
Assim, no triângulo ABC, tem-se

$$\boldsymbol{\alpha + \alpha + \alpha + 60° = 180°.}$$

Logo $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{40°}$ e, portanto, $\boldsymbol{\hat{A}} = \mathbf{2} \cdot \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{2} \cdot \mathbf{40°} = \mathbf{80°}$.

<u>Questão 66: Alternativa C</u>

No triângulo ABC exibido na figura a seguir, Mé o ponto médio do lado AB e N é o ponto médio do lado AC.

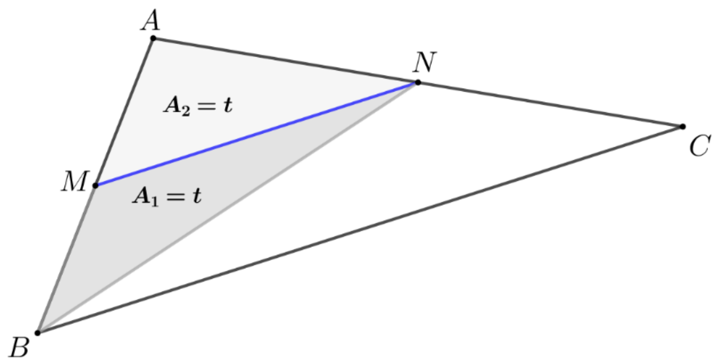


Se a área do triângulo BMN é igual a t, então a área do triângulo ABC é igual a
a) $3t$.
b) $2\sqrt{3}t$.
c) $4t$.
d) $3\sqrt{2}t$.

Resolução:

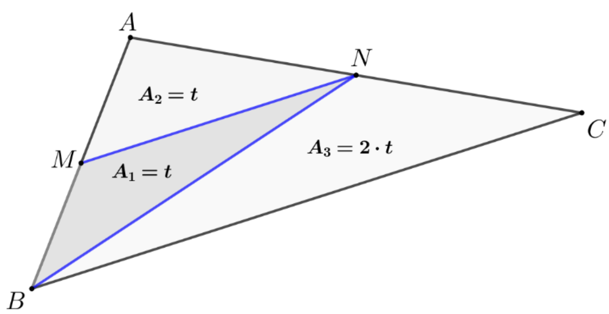
Na figura a seguir, sendo $\boldsymbol{NM}$ mediana do triângulo $\boldsymbol{NAB}$, segue que a área do triângulo

$\boldsymbol{ANM = A_2}$ é igual a área do triângulo $\boldsymbol{BNM = A_1}$, que vale t de acordo com o enunciado.



De modo análogo, como $\boldsymbol{BN}$ é mediana do triângulo $\boldsymbol{ABC}$ segue que a área do triângulo

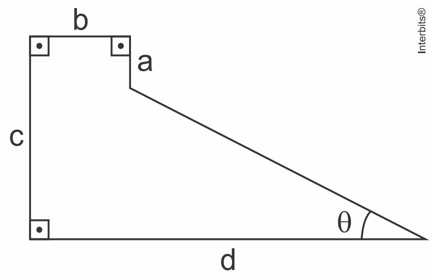
$\boldsymbol{ABN = A_1 + A_2}$ é igual a área do triângulo $\boldsymbol{CBN = A_3}$, que de acordo com a figura acima tem valor de $\boldsymbol{2 \cdot t}$, conforme figura abaixo.



Portanto, a área do triângulo $\boldsymbol{ABC = 4 \cdot t}$.

Questão 67 – Alternativa A

A figura a seguir exibe um pentágono em que quatro lados consecutivos têm comprimentos a, b, c e d.



Se a sequência (a, b, c, d) é uma progressão geométrica de razão $q > 1$, então $\tan\theta$ é igual a

a) $1/q$.

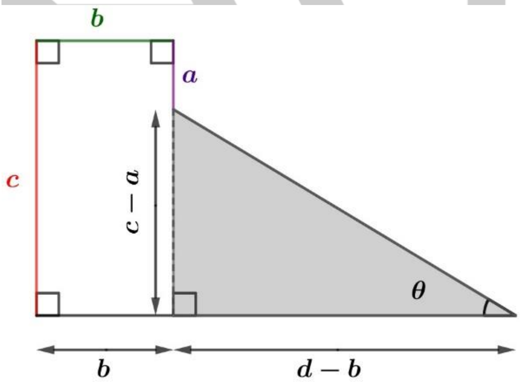
b) q.

c) q^2.

d) $\sqrt{q}$.

Resolução:

Considere a seguinte figura:



no triângulo hachurado tem-se:

$$\tan\theta = \frac{c-a}{d-b}$$

Sendo (a, b, c, d) uma progressão geométrica de razão q, tem-se, por exemplo,

$$\begin{cases} b = a \cdot q \\ c = a \cdot q^2 \\ d = a \cdot q^3 \end{cases}$$

que, substituindo na $\tan\theta$, resulta em:

$$\tan\theta = \frac{a \cdot q^2 - a}{a \cdot q^3 - a \cdot q^2} = \frac{a(q^2-1)}{a \cdot q(q^2-1)} = \frac{1}{q}.$$

Questão 68 – Alternativa D

Sabendo que a e b são números reais, considere a matriz quadrada de ordem 3,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ b & 1 & a \\ 2 & b & 2 \end{pmatrix}.$$

Se a soma dos elementos em cada linha da matriz A tem sempre o mesmo valor, então o determinante de A é igual a

a) 0.
b) 2.
c) 5.
d) 10.

Resolução:

Do enunciado, tem-se o seguinte sistema

$$\begin{cases} 1 + a + 1 = b + 1 + a & \text{Soma linha 1} = \text{Soma linha 2} \\ b + 1 + a = 2 + b + 2 & \text{Soma linha 2} = \text{Soma linda 3} \end{cases}.$$

Resolvendo o sistema anterior tem-se

$$\begin{cases} b = 1 \\ a = 3 \end{cases}$$

e, portanto

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Logo, o valor do determinante de A é igual a

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 18 + 1 - 2 - 3 - 6 = 10.$$

Questão 69 – Alternativa C

No plano cartesiano, considere a circunferência de equação $x^2+y^2-4y+3=0$ e a parábola de equação $3x^2-y+1=0$. Essas duas curvas se interceptam em

a) um ponto.
b) dois pontos.
c) três pontos.
d) quatro pontos.

Resolução:

Para determinar em quantos pontos as duas curvas se interceptam basta resolver o sistema formado pelas equações do enunciado. Assim,

$$\begin{cases} x^2+y^2-4y+3=0 \\ 3x^2-y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2-4y+3=0 \\ 3x^2+1=y \end{cases}$$

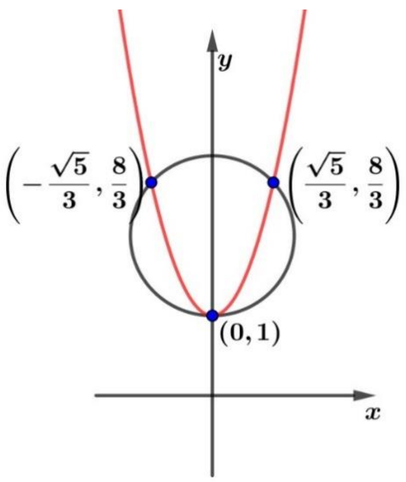
substituindo a segunda equação na primeira obtém-se

$$x^2+(3x^2+1)^2-4(3x^2+1)+3=0 \Leftrightarrow$$
$$x^2+9x^4+6x^2+1-12x^2-4+3=0 \Leftrightarrow$$
$$9x^4-5x^2=0 \Leftrightarrow$$
$$x^2(9x^2-5)=0 \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} x^2=0 \\ 9x^2-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\pm\dfrac{\sqrt{5}.}{3} \end{cases}$$

Deste modo, como $y=1+3x^2$ obtém-se $y=1$ para $x=0$ e $y=\frac{8}{3}$ para $x=\pm\frac{\sqrt{5}}{3}$.

Portanto os pontos de intersecção são:

$(0,1)$, $\left(\frac{\sqrt{5}}{3},\frac{8}{3}\right)$ e $\left(-\frac{\sqrt{5}}{3},\frac{8}{3}\right)$, totalizando três pontos. Segue uma ilustração da resolução.



Questão 70: Alternativa C

Sabendo que a e b são números reais, considere o polinômio cúbico $p(x) = x^3 + ax^2 + x + b$. Se a soma e o produto de duas de suas raízes são iguais a -1, então $p(1)$ é igual a

a) 0.
b) 1.
c) 2.
d) 3.

Resolução:

Note que determinar $p(1)$ significa encontrar o valor de $a + b + 2$, pois

$$\boldsymbol{p(1) = 1^3 + a \cdot 1^2 + 1 + b = a + b + 2}.$$

Para tanto, sejam $\boldsymbol{x_1}$, $\boldsymbol{x_2}$ e $\boldsymbol{x_3}$ as raízes do polinômio. Do enunciado tem-se

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -1 \\ x_1 \cdot x_2 = -1 \end{cases} \qquad \textbf{(I)}$$

e, das relações de Girard tem-se

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -a \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -b \end{cases} \qquad \textbf{(II)}$$

Substituindo (I) em (II) obtém-se

$$\begin{cases} -1 + x_3 = -a \\ -1 \cdot x_3 = -b \end{cases},$$

assim

$$\begin{cases} x_3 = 1 - a & \textbf{(III)} \\ x_3 = b & \textbf{(IV)} \end{cases}.$$

Por fim, substituindo (IV) em (III) segue que

$$\boldsymbol{b = 1 - a}$$

e então

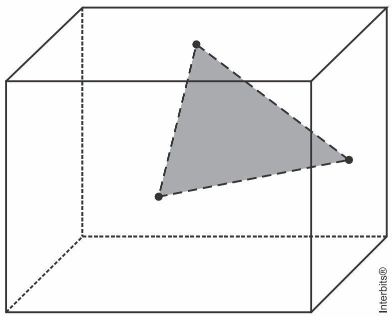
$$\boldsymbol{a + b = 1}.$$

Portanto

$$\boldsymbol{p(1) = a + b + 2 = 1 + 2 = 3}.$$

Questão 71 – Alternativa B

Considere um paralelepípedo retângulo, cujas arestas têm comprimento $6 \text{ cm}, 8 \text{ cm}$ e $10 \text{ cm},$ e um triângulo cujos vértices são os centros (intersecção das diagonais) de três faces de dimensões distintas, como ilustra a figura a seguir.



O perímetro P desse triângulo é tal que

a) $P < 14 \text{ cm}.$

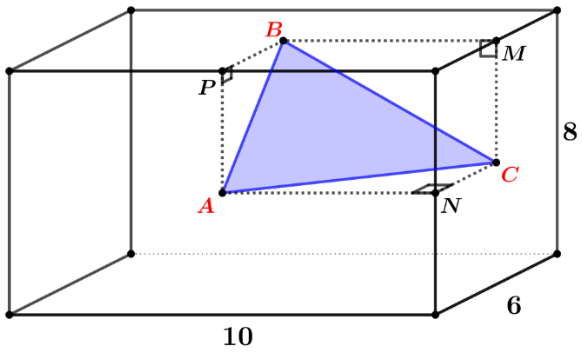
b) $14 \text{ cm} < P < 16 \text{ cm}.$

c) $16 \text{ cm} < P < 18 \text{ cm}.$

d) $P > 18 \text{ cm}.$

Resolução:

Considere a figura a seguir:



Aplicando o Teorema de Pitágoras nos triângulos APB, ANC e CMB, obtém-se respectivamente o seguinte sistema

$$\begin{cases} AB^2 = PA^2 + PB^2 \\ AC^2 = NA^2 + NC^2 \\ BC^2 = MB^2 + MC^2 \end{cases}$$

que é equivalente a

$$\begin{cases} AB^2 = 3^2 + 4^2 \\ AC^2 = 5^2 + 3^2. \\ BC^2 = 5^2 + 4^2 \end{cases}$$

Logo $\begin{cases} AB = 5 \\ AC = \sqrt{34}. \\ BC = \sqrt{41} \end{cases}$

Para determinar o perímetro P do triângulo ABC basta fazer $AB + AC + BC = 5 + \sqrt{34} + \sqrt{41}$. Porém, note que

$$4 < 5 < 6$$

$$5 < \sqrt{34} < 6$$

$$6 < \sqrt{41} < 7$$

Somando as três desigualdades, membro a membro, obtém-se

$$15 < \underbrace{5 + \sqrt{34} + \sqrt{41}}_{\mathrm{P}} < 19,$$

Portanto, tem-se B como alternativa correta.