Questão 31: Alternativa C

As coordenadas geográficas são um sistema de linhas imaginárias traçadas sobre o globo terrestre ou um mapa. Através da interseção de um meridiano com um paralelo, podemos localizar cada ponto da superfície da Terra. Como a Terra apresenta uma superfície quase esférica, é possível determinar dois pontos diametralmente opostos, denominados antípodas. Apenas algumas cidades brasileiras têm uma cidade antípoda, como Coari (AM) e Pontes e Lacerda (MT). Assinale a alternativa que indica duas cidades antípodas.

(a) Pontes e Lacerda (Brasil) - 15° latitude S e 60º longitude W; Candelária (Filipinas) - 15° latitude N e 60° longitude E.

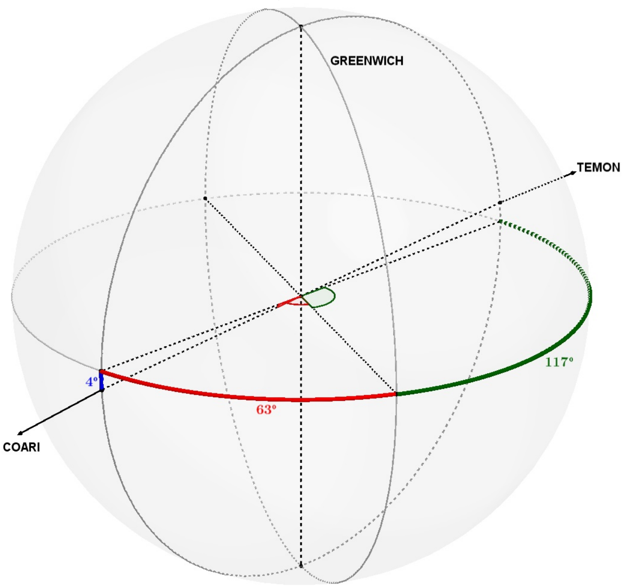
(b) Coari (Brasil) - 4° latitude S e 63° longitude W; Temon (Malásia) - 4° latitude N e 63° longitude E.

(c) Coari (Brasil) - 4° latitude S e 63° longitude W; Temon (Malásia) - 4° latitude N e 117° longitude E.

(d) Pontes e Lacerda (Brasil) - 15° latitude S e 60° longitude W; Candelária (Filipinas) - 75° latitude N e 120° longitude E.

Resolução

De acordo com a definição de antípodas, deve-se procurar nas alternativas aquelas cidades que possuem ângulos suplementares com relação a longitude e mesmo ângulo com relação a latitude, conforme figura a seguir.



Deste modo, a alternativa que cumpre tais condições é a (c).

Questão 32: Alternativa C

Em uma família, cada filha tem o mesmo número de irmãs e irmãos, e cada filho tem um número de irmãs igual ao dobro do número de irmãos. O número total de filhos e filhas dessa família é igual a

(a) 11.

(b) 9.

(c) 7.

(d) 5.

Resolução

Seja x o número de filhos e y o número de filhas da família. Do enunciado, para cada filha tem-se $x = y - 1$ e para cada filho tem-se $y = 2 \cdot (x - 1)$. Assim

$$\begin{cases} x = y - 1 \\ y = 2 \cdot (x-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = -1 \\ -2x + y = -2 \end{cases}$$

Utilizando o método da adição ao sistema anterior obtém-se $-x = -3$, ou seja, $x = 3$. Substituindo $x = 3$ em qualquer equação dos sistemas anteriores obtém-se $y = 4$.

Portanto, o número de filhos e filhas da família é $x + y = 7$.

Questão 33: Alternativa B

Cinco pessoas devem ficar em pé, uma ao lado da outra, para tirar uma fotografia, sendo que duas delas se recusam a ficar lado a lado. O número de posições distintas para as cinco pessoas serem fotografadas juntas é igual a

(a) 48.

(b) 72.

(c) 96.

(d) 120.

Resolução

Para resolver usa-se a estratégia de contar o número total de maneiras em que as cinco pessoas poderiam ficar juntos, se não houvesse restrição, subtraindo do total de maneiras quando se aplica a restrição. Assim, chamando de A, B, C, D e E as cinco pessoas, o número de maneiras de elas ficarem uma ao lado da outra é dado por $P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.

Suponha que A e B sejam as duas pessoas que se recusam a ficar lado a lado, logo o número de maneiras que eles ficariam juntos é dado por

$$\boxed{\underbrace{\_ \cdot \_}_{\text{A ou B}}} \cdot \_ \cdot \_ \cdot \_ \Rightarrow 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2! = 48,$$

onde 2! representa a troca de posição de A com B.

Portanto há $120 - 48 = 72$ posições distintas para as cinco pessoas serem fotografadas.

Questão 34: Alternativa C

Um atleta participa de um torneio composto por três provas. Em cada prova, a probabilidade de ele ganhar é de 2/3 , independentemente do resultado das outras provas. Para vencer o torneio, é preciso ganhar pelo menos duas provas. A probabilidade de o atleta vencer o torneio é igual a

(a) 2/3.

(b) 4/9.

(c) 20/27.

(d) 16/81.

Resolução

Denotando por P a prova em que o atleta perde e por G a prova em que o atleta ganha, as configurações possíveis em que o atleta ganha pelo menos duas provas e suas respectivas probabilidades são

$$\begin{aligned} PGG &\longrightarrow \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{27} \\ GPG &\longrightarrow \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{27} \\ GGP &\longrightarrow \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{4}{27} \\ GGG &\longrightarrow \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{8}{27} \end{aligned}.$$

Portanto, a probabilidade de o atleta vencer o torneio é igual a

$$P(\text{Vencer pelo menos duas}) = \underbrace{C_{3,2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{2}{3}\right)^2}_{\text{Distribuição Binomial}} = 3\cdot\frac{4}{27}+\frac{8}{3}=\frac{20}{27}.$$

Questão 35: Alternativa A

Sabendo que a é um número real, considere a função $f(x) = ax + 2$, definida pera todo número real x. Se $f(f(1)) = 1$, então

(a) $a = -1$.

(b) $a = -1/2$.

(c) $a = 1/2$.

(d) $a = 1$.

Resolução

Sendo $f(x) = ax+2$, segue que $f(f(x)) = a \cdot f(x) + 2 = a \cdot (ax+2) + 2 = a^2x + 2a + 2$. Como $f(f(1)) = 1$ tem-se, para $x = 1$

$$a^2 \cdot 1 + 2a + 2 = 1 \Leftrightarrow \underbrace{a^2 + 2a + 1}_{\text{quadrado perfeito}} = 0 \Leftrightarrow (a+1)^2 = 0 \Leftrightarrow a = -1.$$

Questão 36: Alternativa D

Sabendo que a é um número real, considere a equação quadrática $2x^2 + ax + 10 = 0$. Se as soluções dessa equação são números inteiros, o módulo da soma das soluções é igual a

(a) 3.

(b) 4.

(c) 5.

(d) 6.

Resolução

Sebe-se que em uma equação do segundo grau, da forma $Ax^2 + Bx + C = 0$ o produto das raízes, $x_1 \cdot x_2$, é dado por $\dfrac{C}{A}$.

Na equação $2x^2 + ax + 10 = 0$ o produto produto de suas raízes é

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{C}{A} = \frac{10}{2} = 5,$$

e como as soluções são números inteiros segue que $x_1 = 1$ e $x_2 = 5$ ou que $x_1 = -1$ e $x_2 = -5$. Assim, independente da escolha para x_1 ou x_2, o módulo da soma das soluções é igual a

$$|1 + 5| = |-1 - 5| = 6.$$

Questão 37: Alternativa C

Considere que $(a, b, 3, c)$ é uma progressão aritmética de números reais, e que a soma de seus elementos é igual a 8. O produto dos elementos dessa progressão é igual a

(a) 30.

(b) 10.

(c) -15.

(d) -20.

Resolução

Sendo $(a, b, 3, c)$ uma progressão aritmética, tem-se $a + c = b + 3$ pois são termos equidistantes. Do enunciado, $a + b + 3 + d = 8$ assim,

$$a + b + 3 + c = 8 \Rightarrow \underbrace{a + c}_{b+3} + b + 3 = 8 \Rightarrow b + 3 + b + 3 = 8 \Rightarrow 2b = 2 \Rightarrow b = 1.$$

Deste modo a progressão é dada por $(a, 1, 3, c) = (-1, 1, 3, 5)$, pois sua razão é $3 - b = 3 - 1 = 2$.

Portanto, o produto dos elementos dessa progressão é $-1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 = -15$.

Questão 38: Alternativa A

Tendo em vista que a e b são números reais positivos, $a \neq b$, considere a função $f(x) = ab^x$, definida para todo número real x. Logo $f(2)$ é igual a

(a) $\sqrt{f(1)f(3)}$.

(b) $f(3)/f(0)$.

(c) $f(0)f(1)$.

(d) $f(0)^3$.

Resolução

Sendo $f(x) = ab^x$ para todo x real, segue que

$$\begin{cases} f(0) = ab^0 = a \\ f(1) = ab^1 = ab \\ f(2) = ab^2 \\ f(3) = ab^3 \end{cases}.$$

Analisando as alternativas, verifica-se que

$$\sqrt{f(1)f(3)} = \sqrt{ab \cdot ab^3} = \sqrt{a^2b^4} = ab^2 = f(2) \ \text{(CORRETA)}$$

$$\frac{f(3)}{f(0)} = \frac{ab^3}{a} = b^3 \neq f(2) \ \text{(INCORRETA)}$$

$$f(0)f(1) = a \cdot ab = a^2b \neq f(2) \ \text{(INCORRETA)}$$

$$f(0)^3 = a^3 \neq f(2) \ \text{(INCORRETA)}$$

Questão 39: Alternativa B

Sabendo que p é um número real, considere a matriz $A = \begin{bmatrix} p & 2 \\ 0 & p \end{bmatrix}$ e sua transposta A^T. Se $A + A^T$ é singular (não invertível), então

(a) $p = 0$.

(b) $|p| = 1$.

(c) $|p| = 2$.

(d) $p = 3$.

Resolução

Sabe-se que uma matriz quadrada A é invertível se, e somente se, $\det A \neq 0$. Assim, para que $A + A^T$ seja singular deve-se ter $\det(A + A^T) = 0$. Como

$$A + A^T = \begin{bmatrix} p & 2 \\ 0 & p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p & 0 \\ 2 & p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2p & 2 \\ 2 & 2p \end{bmatrix}.$$

Portanto, $\det(A + A^T) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2p & 2 \\ 2 & 2p \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 4p^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow 4p^2 = 4 \Leftrightarrow$ $p^2 = 1 \Leftrightarrow p = \pm 1 \Leftrightarrow |p| = 1$.

Questão 40: Alternativa A

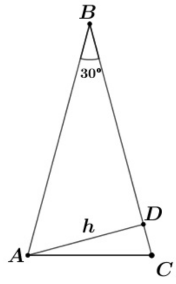
A figura exibe o triângulo ABC, em que $AB = BC$ e $\overline{AD}$ é uma altura de comprimento h. A área do triângulo ABC é igual a

(a) h^2.

(b) $\sqrt{2}h^2$.

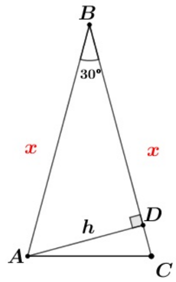
(c) $\sqrt{3}h^2$.

(d) $2h^2$.



Resolução

Sendo $\overline{AD}$ uma altura do triângulo, segue que $A\hat{D}B = 90°$ e, portanto, o triângulo ADB é retângulo em D. Na figura a seguir



tem-se $AB = BC = x$ e no triângulo ADB $\operatorname{sen} 30° = \dfrac{h}{x}$. Logo $x = 2h$ e a área do triângulo ABC é dada por

$$S_{\Delta ABC} = \frac{BC \cdot AD}{2} = \frac{x \cdot h}{2} = \frac{2h \cdot h}{2} = h^2.$$

Questão 41: Alternativa B

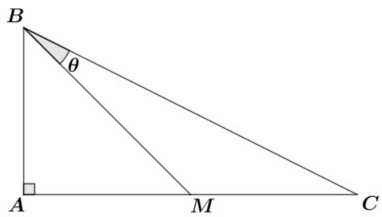
A figura abaixo exibe o triângulo retângulo ABC, em que $AB = AM = MC$. Então $\text{tg}\,\theta$ é igual a

(a) 1/2.

(b) 1/3.

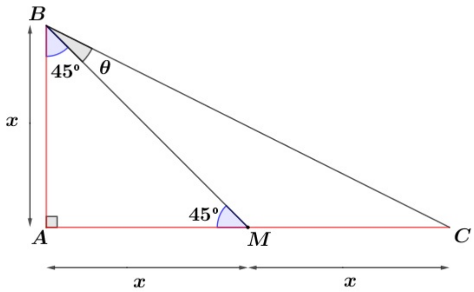
(c) 1/4.

(d) 1/5.



Resolução

Sendo $AB = AM$, segue que o triângulo ABM é retângulo e isósceles, assim $A\hat{B}M = 45°$, conforme figura a seguir.



Ainda, no triângulo ABC, da figura anterior, tem-se que

$$\text{tg}\, A\hat{B}C = \text{tg}(45° + \theta) = \frac{AC}{AB} = \frac{2x}{x} = 2.$$

Mas, $\text{tg}(45° + \theta) = \dfrac{\text{tg}\,45° + \text{tg}\,\theta}{1 - \text{tg}\,45° \cdot \text{tg}\,\theta}$. Portanto

$$\frac{\text{tg}\,45° + \text{tg}\,\theta}{1 - \text{tg}\,45° \cdot \text{tg}\,\theta} = 2 \Leftrightarrow \frac{1 + \text{tg}\,\theta}{1 - \text{tg}\,\theta} = 2 \Leftrightarrow$$

$$1 + \text{tg}\,\theta = 2(1 - \text{tg}\,\theta) \Leftrightarrow 1 + \text{tg}\,\theta = 2 - 2\text{tg}\,\theta \Leftrightarrow 3\text{tg}\,\theta = 1 \Leftrightarrow \text{tg}\,\theta = \frac{1}{3}.$$

Questão 42: Alternativa C

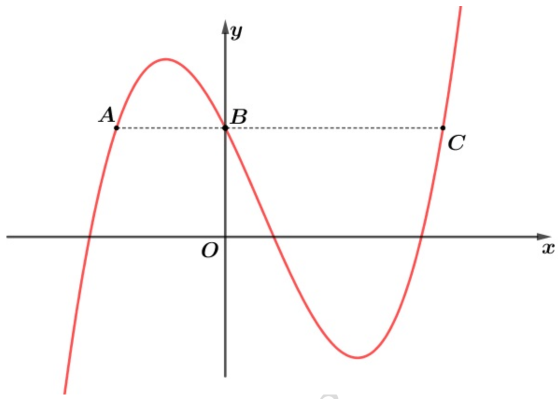
Seja a função polinomial do terceiro grau $f(x) = x^3 - x^2 - 2x + 1$, definida para todo número real x. A figura abaixo exibe o gráfico de $y = f(x)$, no plano cartesiano, em que os pontos A, B e C têm a mesma ordenada. A distância entre os pontos A e C é igual a

(a) 2.

(b) $2\sqrt{2}$.

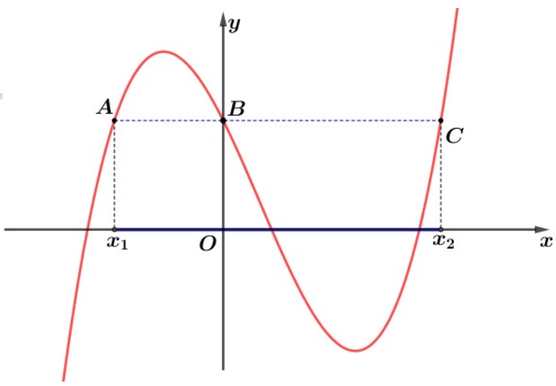
(c) 3.

(d) $3\sqrt{2}$.



Resolução

Note que $f(0) = 0^3 - 0^2 - 2 \cdot 0 + 1 = 1$ é a ordenada do ponto B. Assim A e C, de acordo com o enunciado, também possuem ordenada igual a 1. Deste modo, para determinar a distância entre os pontos A e C basta determinar a distância entre a abscissa do ponto A e a abscissa do ponto C, denotadas por x_1 e x_2, na figura a seguir, respectivamente.



Porém, para isso, faz-se $f(x) = 1$. Portanto

$f(x) = 1 \Leftrightarrow x^3 - x^2 - 2x + 1 = 1 \Leftrightarrow x^3 - x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x \cdot (x^2 - x - 2) = 0$, que resulta em $x = 0$ ou $x^2 - x - 2 = 0$. Desta última, tem-se $x = -1$ ou $x = 2$.

Logo $x_1 = -1$ e $x_2 = 2$, concluindo que $d(A, C) = x_2 - x_1 = 2 - (-1) = 3$.

Questão 43: Alternativa D

Sabendo que c é um número real, considere no plano cartesiano, a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 2cx$. Se o centro dessa circunferência pertence à reta de equação $x + 2y = 3$, então seu raio é igual a

(a) $\sqrt{2}$.
(b) $\sqrt{3}$.
(c) 2.
(d) 3.

Resolução

Primeiro determina-se o centro da circunferência $x^2 + y^2 = 2cx$ por completamento de quadrados. Assim,

$$x^2 + y^2 = 2cx \Leftrightarrow x^2 - 2cx + y^2 = 0 \Leftrightarrow (x - c)^2 - c^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow (x - c)^2 + y^2 = c^2,$$

que representa um circunferência de centro $(c, 0)$ e raio c.
Como o centro dessa circunferência pertence à reta $x + 2y = 3$, então

$$c + 2 \cdot 0 = 3 \Leftrightarrow c = 3.$$

Portanto, como c também é o raio, segue que o raio é 3.

Questão 44: Alternativa C

Se um tetraedro regular e um cubo têm áreas de superfícies iguais, a razão entre o comprimento das arestas do tetraedro e o comprimento das arestas do cubo é igual a

(a) $\sqrt{2}\sqrt{3}$.

(b) $\sqrt[4]{2}\sqrt{3}$.

(c) $\sqrt{2}\sqrt[4]{3}$

(d) $\sqrt[4]{2}\sqrt[4]{3}$.

Resolução

Como um tetraedro regular possui 4 faces formadas por triângulos equiláteros, segue que sua área superficial é dada por

$$S_{\text{tetraedro}} = 4 \cdot \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} = \ell^2\sqrt{3},$$

onde ℓ é a medida das arestas do tetraedro. Já o cubo é formado por 6 faces quadrangulares e, portanto, sua área superficial é dada por

$$S_{\text{cubo}} = 6 \cdot a^2,$$

onde a é a medida das arestas do cubo.
Como $S_{\text{tetraedro}} = S_{\text{cubo}}$, tem-se

$$\ell^2\sqrt{3} = a^2 \cdot 6 \Leftrightarrow \frac{\ell^2}{a^2} = \frac{6}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \left(\frac{\ell}{a}\right)^2 = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{\ell}{a} = \sqrt{2}\sqrt[4]{3}.$$