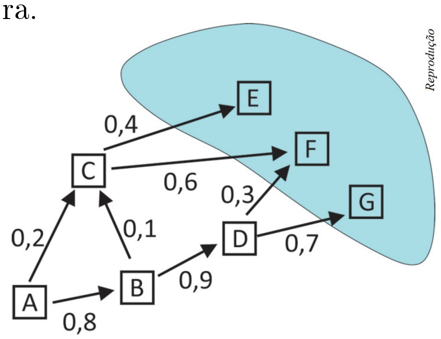
Questão 13: Alternativa E

Carros que saem da cidade A rumo a alguma das cidades turísticas E, F e G fazem caminhos diversos, passando por pelo menos uma das cidades B, C e D, apenas no sentido indicado pelas setas, como mostra a figura. Os números indicados nas setas são as probabilidades, dentre esses carros, de se ir de uma cidade a outra.



Nesse cenário, a probabilidade de um carro ir de A a F é

(a) 0,120.
(b) 0,216.
(c) 0,264.
(d) 0,336.
(e) 0,384.

Resolução

Primeiro, deve-se verificar todas as possibilidades de um carro ir de A a F, que pode ser representado por

$$A \longrightarrow C \longrightarrow F \qquad (I)$$
ou
$$A \longrightarrow B \longrightarrow D \longrightarrow F \qquad (II)$$
ou
$$A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow F \qquad (III)$$

Deste modo, suas respectivas probabilidades são

$$0,2 \cdot 0,6 = 0,12 \qquad (I)$$
ou
$$0,8 \cdot 0,9 \cdot 0,3 = 0,216 \qquad (II)$$
ou
$$0,8 \cdot 0,1 \cdot 0,6 = 0,048 \qquad (III)$$

Portanto a probabilidade de um carro ir de A a F é dada por

$$0,12 + 0,216 + 0,048 = 0,384.$$

Questão 14: Alternativa B

Se, em 15 anos, o salário mínimo teve um aumento nominal de 300% e a inflação foi de 100%, é correto afirmar que o aumento real do salário mínimo, nesse período, foi de

(a) 50%.

(b) 100%.

(c) 150%.

(d) 200%.

(e) 250%.

Resolução

Seja S o valor do salário antes do aumento nominal. Assim, após o aumento nominal de 300% seu valor passou a ser

$$S + 300\% \cdot S = S + 3 \cdot S = 4S.$$

Já, o mesmo salário S corrigido pela inflação passou a ser

$$S + 110\% \cdot S = S + 1 \cdot S = 2.$$

Logo, o aumento real do salário é dado por $4S - 2S = 2S$, ou seja, o valor nominal menos a inflação. Portanto o salário de S passou para $2S$, o que equivale a um aumento de 200%.

Questão 15: Alternativa D

O cilindro de papelão central de uma fita crepe tem raio externo de 3 cm. A fita tem espessura de 0,01 cm e dá 100 voltas completas. Considerando que, a cada volta, o raio externo do rolo é aumentado no valor da espessura da fita, o comprimento total da fita é de, aproximadamente,

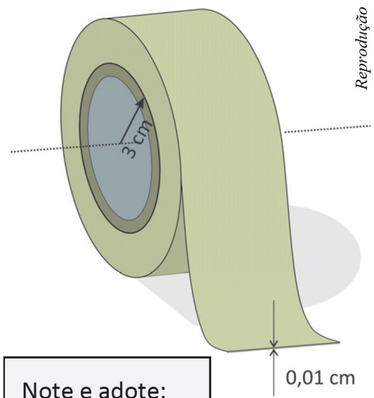
(a) 9,4 3.

(b) 11,0 m.

(c) 18,8 m.

(d) 22,0 m.

(e) 25,1 m.



Note e adote:
$\pi \cong 3{,}14$.

Resolução

Para cada volta completa de fita crepe no cilindro acrescenta-se 0,01 cm no raio do cilindro. Então

$$\left(\underbrace{3,01}_{1^a\text{ volta}} ; \underbrace{3,02}_{2^a\text{ volta}} ; \underbrace{3,03}_{3^a\text{ volta}} ;\cdots; \underbrace{3,99}_{99^a\text{ volta}} ; \underbrace{4,00}_{100^a\text{ volta}} \right)$$

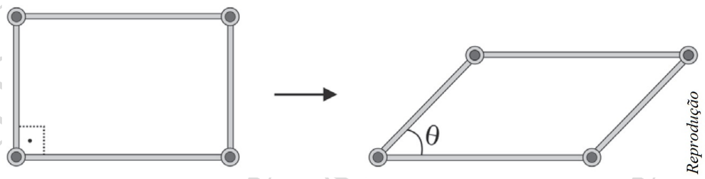
é a sequência dos novos raios formados da primeira a centésima volta. Logo, o comprimento da fita crepe, em centímetros, é

$$2\pi\cdot(3,01)+2\pi\cdot(3,02)+\cdots+2\pi\cdot(4,00) = 2\pi\cdot(3,01+3,02+\cdots4,00) = 2\pi\cdot\underbrace{\left[\frac{(3,01+4)\cdot 100}{2}\right]}_{\text{soma de P.A}} =$$

$$= 2\pi\cdot\frac{701}{2} = 701\cdot\pi = 2.201,14\,\text{cm} =\approx 22,0\,\text{m}.$$

Questão 16: Alternativa C

Um objeto é formado por 4 hastes rígidas conectadas em seus extremos por articulações, cujos centros são os vértices de um paralelogramo. As hastes movimentam-se de tal forma que o paralelogramo permanece sempre no mesmo plano. A cada configuração desse objeto, associa-se θ, a medida do menor ângulo interno do paralelogramo. A área da região delimitada pelo paralelogramo quando $\theta = 90°$ é A.

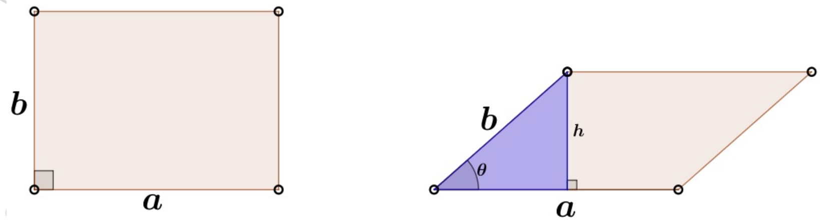


Para que a área da região delimitada pelo paralelogramo seja $A/2$, o valor de θ é, necessariamente, igual a

(a) 15°.
(b) 22,5°.
(c) 30°.
(d) 45°.
(e) 60°.

Resolução

Considere a figura a seguir,



De acordo com o enunciado tem-se, $a \cdot b = A$. Já, no triângulo destacado tem-se $\text{sen}(\theta) = \dfrac{h}{b}$. Assim, a área do paralelogramo é dada por

$$a \cdot h = a \cdot b \cdot \text{sen}(\theta).$$

A fim de que a área do paralelogramo seja $A/2$, basta fazer

$$\underbrace{a \cdot b}_{A} \cdot \text{sen}(\theta) = \frac{A}{2} \Leftrightarrow A \cdot \text{sen}(\theta) = \frac{A}{2} \Leftrightarrow \text{sen}(\theta) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \theta = 30°.$$

Questão 17: Alternativa A

A menor esfera na qual um paralelepípedo reto-retângulo de medidas $7\,\text{cm} \times 4\,\text{cm} \times 4\,\text{cm}$ está inscrito tem diâmetro de

(a) 9 cm.

(b) 10 cm.

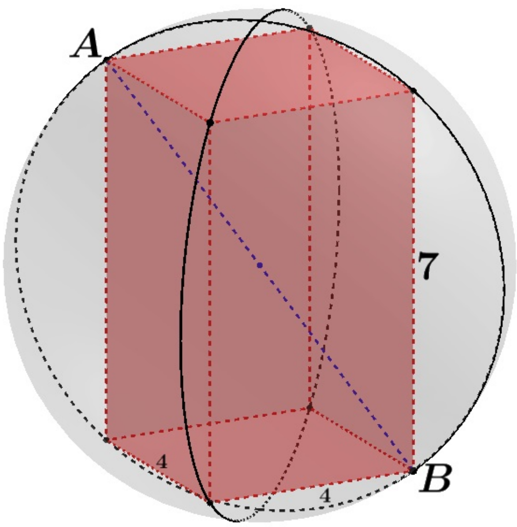
(c) 11 cm.

(d) 12 cm.

(e) 15 cm.

Resolução

Considere a figura a seguir



A fim de que o paralelepípedo reto-retângulo esteja inscrito em uma esfera, basta tomar o diâmetro da esfera como sendo uma das diagonais do paralelepípedo, por exemplo $\overline{AB}$. Sabe-se que a diagonal de um paralelepípedo reto-retângulo de dimensões a, b e c é dada por

$$D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Logo $AB = D = \sqrt{4^2 + 4^2 + 7^2} = \sqrt{16 + 16 + 49} = \sqrt{81} = 9\,\text{cm}.$

Questão 18: Alternativa C

A dona de uma lanchonete observou que, vendendo um *combo* a R$ 10,00, 200 deles são vendidos por dia, e que, para cada redução de R$ 1,00 nesse preço, ela vende 100 *combos* a mais. Nessas condições, qual é a máxima arrecadação diária que ela espera obter com a venda desse *combo*?

(a) R$ 2.000,00.

(b) R$ 3.200,00.

(c) R$ 3.600,00.

(d) R$ 4.000,00.

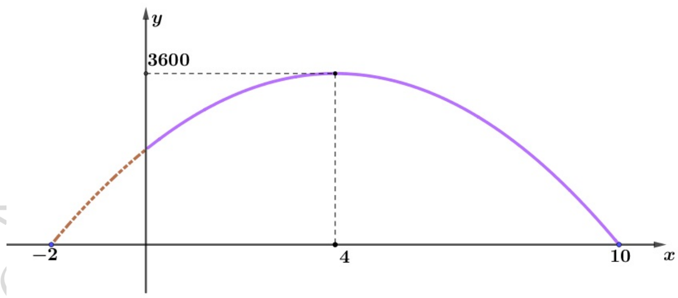
(e) R$ 4.800,00.

Resolução

Seja x o valor, em reais, a ser reduzido no valor do *combo*. Como arrecadação é (preco) $\cdot$ (quantidade), tem-se

$$A(x) = (10 - x) \cdot (200 + 100x) = -100x^2 + 800x + 200.$$

A representação gráfica da função $A(x)$ é dada por



Para se ter a arrecadação máxima basta determinar o y_v e, para isso, faz-se $y_v = A(4) = (10-4)\cdot(200+100\cdot 4)$, onde 4 é o x_v que pode ser determinado fazendo $x_v = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-800}{2\cdot 100} = 4$. Portanto

$$y_v = 3600.$$

Questão 19: Alternativa C

A função E de Euler determina, para cada número natural n, a quantidade de números naturais menores do que n cujo máximo divisor comum com n é igual a 1. Por exemplo, $E(6) = 2$ pois os números menores do que 6 com tal propriedade são 1 e 5. Qual o valor máximo de $E(n)$, para n de 20 a 25?

(a) 19.

(b) 20.

(c) 22.

(d) 24.

(e) 25.

Resolução

Observe que 23 é o único natural primo dentre os números $20, 21, 22, 23, 24$ e 25. Assim

- $E(23) = 22$,

pois todos os números naturais menores do que 23, no caso do 1 ao 22, são primos entre si com ele.
Note agora que,

- $E(20) < 22$
- $E(21) < 22$
- $E(22) < 22$

pois nos para $n < 23$ haverá no máximo 21 números. Tem-se ainda,

- $E(24) = 8$, pois $mdc(24, n) = 1$ para $n \in \{1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23\}$.

Por fim,

- $E(25) = 20$, pois $mdc(25, n) = 1$ para $n \in \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19, 21, 22, 23, 24\}$

Portanto o valor máximo para $E(n)$ é igual a 22.

Questão 20: Alternativa A

Se $3x^2 - 9x + 7 = (x-a)^3 - (x-b)^3$, para todo número real x, o valor de $(a+b)$ é

(a) 3.

(b) 5.

(c) 6.

(d) 9.

(e) 12.

Resolução

Desenvolvendo o segundo membro da igualdade obtém-se

$$3x^2 - 9x + 7 = x^3 - 3x^2a + 3xa^2 - a^3 - (x^3 - 3x^2b + 3xb^2 - b^3),$$

que é equivalente a

$$3x^2 - 9x + 7 = x^3 - 3x^2a + 3a^2x - a^3 - x^3 + 3bx^2 - 3b^2x + b^3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 9x + 7 = x^2(-3a + 3b) + x(3a^2 - 3b^2) - a^3 + b^3.$$

Como tal igualdade é válida para número real x, obtém-se, igualando os coeficientes dos termos de mesmo grau,

$$\begin{cases} -3a + 3b = 3 \\ 3a^2 - 3b^2 = -9 \\ -a^3 + b^3 = 7 \end{cases}$$

Assim, dividindo a primeira equação do sistema por 3 e a segunda equação do sistema também por 3 tem-se

$$\begin{cases} -a + b = 1 \\ a^2 - b^2 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b = -1 \\ (a+b)\cdot(a-b) = -3 \end{cases} \Leftrightarrow (a+b)\cdot(-1) = -3 \Leftrightarrow a + b = 3.$$

Questão 21: Alternativa D

Uma agência de turismo vendeu um total de 78 passagens para os destinos: Lisboa, Paris e Roma. Sabe-se que o número de passagens vendidas para Paris foi o dobro do número de passagens vendidas para os outros dois destinos conjuntamente. Sabe-se também que, para Roma, foram vendidas duas passagens a mais que a metade das vendidas para Lisboa. Qual foi o total de passagens vendidas, conjuntamente, para Paris e Roma?

(a) 26.

(b) 38.

(c) 42.

(d) 62.

(e) 68.

Resolução

Denota-se por L, P e R os valores das passagens para Lisboa, Paris e Roma, respectivamente. Do enunciado tem-se

$$\begin{cases} L+P+R=78 \\ P=2\cdot(L+R) \\ R=\dfrac{L}{2}+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} L+P+R=78 \\ P=2L+2R \\ 2R=L+4 \end{cases}.$$

Como deseja-se determinar o valor de $P+R$, pode reescrever o sistema anterior eliminando a incógnita L a partir da substituição de $L=2R-4$ (equação 3), nas equações 1 e 2, do sistema anterior. Assim

$$\begin{cases} L+P+R=78 \\ P=2L+2R \\ 2R=L+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2R-4+P+R=78 \\ P=2(2R-4)+2R \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3R+P=82 \\ -6R+P=-8 \end{cases}.$$

Logo

$$\begin{cases} 3R+P=82 \\ -6R+P=-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3R+P=82 \\ 6R-P=8 \end{cases} \Leftrightarrow 9R=90 \Leftrightarrow R=10.$$

Como $6R-P=8$, segue que $P=52$. Portanto

$$R+P=10+52=62.$$

Questão 22: Alternativa D

Um ponto (x, y) do plano cartesiano pertence ao conjunto F se é equidistante dos eixos OX e OY e pertence ao círculo de equação $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 2 = 0$. É correto afirmar que F

(a) é um conjunto vazio.

(b) tem exatamente 2 pontos, um no primeiro quadrante e outro no segundo quadrante.

(c) tem exatamente 2 pontos, ambos no primeiro quadrante.

(d) tem exatamente 3 pontos, sendo dois no primeiro quadrante e outro no segundo quadrante.

(e) tem exatamente 4 pontos, sendo dois no primeiro quadrante e dois no segundo quadrante.

Resolução

A fim de que um ponto (x, y) do plano cartesiano seja equidistante(mesma distância) dos eixos OX e OY deve-se se ter $y = x$ ou $y = -x$.
Assim para que este ponto pertença a circunferência de equação $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 2 = 0$ e, então, ao conjunto F, basta resolver os sistemas

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 6y + 2 = 0 \\ x = y \end{cases} \tag{1}$$

e

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 6y + 2 = 0 \\ x = -y \end{cases} \tag{2}$$

No sistema (1)

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 6y + 2 = 0 \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow 2x^2 - 8x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{3}.$$

Deste modo as soluções são os pontos $(2 + \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3})$ ou $(2 - \sqrt{3}, 2 - \sqrt{3})$.
No sistema (2)

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 6y + 2 = 0 \\ x = -y \end{cases} \Leftrightarrow 2x^2 + 4x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1.$$

Deste modo a solução é o ponto $(-1, 1)$.
Portanto, ha exatamente 3 pontos, sendo dois no primeiro quadrante e outro no segundo quadrante.

Questão 23: Alternativa D

Uma cidade é dividida em dois Setores: o Setor Sul, com área de 10 km^2, e o Setor Norte, com área de 30 km^2. Após um final de semana, foram divulgados os seguintes totais pluviométricos:

Dia	Sul	Norte
sábado	7 mm	11 mm
domingo	9 mm	17 mm

É correto afirmar que o total pluviométrico desse final de semana na cidade inteira foi de

(a) 15 mm.

(b) 17 mm.

(c) 22 mm.

(d) 25 mm.

(e) 28 mm.

Resolução

O índice pluviométrico pode ser determinado pela razão entre a quantidade de chuva e a área atingida. Como no final de semana na região Sul choveu $7 + 9 = 16$ mm e na região norte choveu $11 + 17 = 28$ mm, tem-se que o total pluviométrico desse final de semana na cidade foi de

$$\frac{16 \cdot 10 + 28 \cdot 30}{10 + 30} = \frac{1000}{40} = 25 \text{ mm}.$$

Observação

Neste exercício, independe a unidade de medida escolhida para a área das regiões, uma vez que na hora da divisão as unidades de medidas se cancelarão restando apenas o índice pluviométrico, em milímetros.